

### **3.6. Новый подход к исследованию формы продольных профилей древесного ствола и его прироста**

*Н.Ф. Каплина*

Форма продольного сечения ствола дерева (далее – форма ствола) – традиционный предмет прикладных исследований, лежащих в основе методов как оценки и нормирования объема и сбега стволов деревьев, так и разработки технологий выращивания и определения возраста спелости древостоев по целевым сортиментам. Этим вопросам посвящено множество исследований за более чем вековой период (Анучин, 1992; Захаров, 1967; Кофман, 1986). Значительное внимание уделяется понятию формы ствола как важнейшего биологического признака дерева в фундаментальных научных дисциплинах, таких как физиология (в т.ч. биологическая продуктивность) и экологическая морфология древесных растений (Серебряков, 1962; Крамер, Козловский, 1963; Chiba, Shinozaki, 1994).

Для решения различных практических и научных задач необходимо количественное описание формы ствола. К настоящему времени существуют три основных направления, решающие данную проблему посредством: 1) коэффициентов формы ствола (соотношений его диаметров на различных высотах) и видовых чисел (соотношений объема ствола и объема цилиндра с той же площадью основания); 2) функций «образующей» или «сбега» ствола; 3) имитационного моделирования.

Удобство первого направления заключается в возможности оценить форму ствола небольшим количеством показателей и выявить эмпирически её изменчивость, зависимость от формообразующих факторов и классифицировать стволы по их форме. Именно это направление положило начало исследованию формы ствола и до настоящего времени наиболее широко применяется в прикладных исследованиях и практике при выращивании и таксации стволовой древесины. Его недостатком является неопределенность линии образующей ствола, которая необходима при изучении его сбега и размерной структуры. Для решения последней задачи при составлении «Массовых таблиц...» (1931) образующую ствола получали графически вручную по координатам её пяти точек: на высоте 1,3 м, на 1/4, 1/2, 3/4 протяженности ствола и в его вершине; сбег ниже высоты 1,3 м моделировался отдельно. Успешная реализация этого способа косвенно свидетельствует о характерном положении и достаточном количестве указанных точек для аппроксимации образующей ствола.

Второе направление, заключающееся в аналитическом описании кривой сбега ствола, в отличие от первого направления, позволяет вычислить координаты этой кривой в любой её точке. Это открывает принципиально новые возможности исследования и использования кривой сбега ствола, в т.ч. с помощью компьютерного моделирования. Кривая близка к функциональной, она достаточно гладкая, с хорошо выраженным характерными участками. Поэтому основной проблемой этого направления является сложная форма кривой: образующая ствола состоит из различающихся по форме участков, минимум из двух (Кофман, 1986; Valentine, Gregoire, 2001). Причиной является многообразие формообразующих факторов (механических и физиологических, определяемых свойствами кроны и ствола). Параметры функций, позволяющих наилучшим образом аппроксимировать образующую ствола (например, полиномов) не поддаются интерпретации, а их многочисленность осложняет выявление их зависимостей от формообразующих факторов. Все же это направление весьма распространено в прикладных исследованиях объема и сбега стволов, благодаря удобству вычисления последних. К этому же направлению можно отнести разработку функций, параметры которых интерпретируются в соответствии с различными представлениями о формообразовании стволов (механические, физиологические, аллометрическая теории) (Кофман, 1986; Deleuze, Houllier, 2002) либо по корреляции параметров с формообразующими факторами. Такие функции имеют ограниченные возможности, так как не описывают всего разнообразия условий формообразования, тем не менее, они находят применение в теоретических обсуждениях.

Третье направление описания формы ствола обычно сочетается с описанием профиля его прироста (Ikonen et al., 2006) и состоит в получении координат любой точки образующей и всей поверхности ствола численными методами в соответствии с определенными ограничениями (морфологическими, физиологическими, механическими и т.д.), свойственными природе дерева и его ствола. Возможности такого подхода расширяются с развитием вычислительной техники и оправданы теоретически, исходя из представления о формообразовании ствола как результата оптимизации множества процессов различной природы. Данное направление развивается наиболее активно в моделировании формирования кроны дерева (Цельникер и др., 2000).

Развитие третьего направления исследования формы ствола дерева ограничено современными знаниями. Немалую роль в их пополнении играют первые два направления. Отсюда следует важность объедине-

ния преимуществ последних в функции, содержащей параметры формы. Именно наличие такого параметра в степенной функции, даже при существенных недостатках аппроксимации ею образующей ствола, обусловило её привлечение для обсуждения теоретических аспектов формообразования Кофман, 1986).

Решением данной задачи и отличается новый подход к количественному описанию формы ствола: он позволяет одновременно описать образующую ствола и идентифицировать его форму параметрами той же функции (Лебков, 2002). Отличительным признаком данного подхода является обмен местами между зависимой и независимой переменными по сравнению с их традиционным представлением.

Описываемый подход был предложен В.Ф. Лебковым на основе сходства S-образных форм образующей ствола и интегральных функций распределения. Предполагалось использовать для этой цели функцию Вейбулла, содержащую параметр формы. При этом последний интерпретировался как истинный коэффициент формы ствола (в отличие от таксационных коэффициентов формы), поскольку он определяет соотношение диаметров ствола на любых высотах его профиля. Ввиду недостаточной гибкости функции Вейбулла, она была нами модифицирована с введением второго параметра формы и в этом виде впервые реализована с указанными целями (Лебков, 2002). В дальнейшем функция образующей ствола неоднократно модернизировалась, получила развитие и её интерпретация.

Форма продольного сечения прироста ствола (далее – форма прироста) также привлекает интерес как практиков, так и ученых. Однако её исследование ограничилось в основном описанием наблюдаемых типов и их встречаемости в связи с показателями дерева (лесообразующей породой, этапом онтогенеза, ходом роста ствола по высоте и по диаметру, развитием кроны, соотношением приростов по длине верхушечного и боковых побегов); количественно предложено её оценивать коэффициентами, по аналогии с коэффициентами формы ствола (Дворецкий, 2004). Форма прироста часто немонотонна, в отличие от формы ствола, в связи с чем её аналитическое описание затруднено в ещё большей степени. Для решения данной проблемы более оправданы и предлагаются имитационные модели, в то же время разрабатываются и функции продольного профиля прироста ствола (Courbet, Houllier, 2002).

Нами предложен метод аппроксимации продольного распределения прироста ствола как одной из возможностей рассматриваемого нового подхода (Каплина, 2007а, б, 2008а, б). Такой подход соответствует предположению о ведущем факторе формирования прироста – поддер-

жании стабильной формы ствола, соответствующей внешним и внутренним факторам формообразования.

Целью данной статьи является анализ и систематизация результатов развития предложенного подхода: моделей профилей ствола и его прироста, их интерпретации, оценки «работы» и перспектив применения.

**Объекты и методика.** Для иллюстрации точности аппроксимации образующей ствола предлагаемыми математическими моделями, а также для анализа устойчивости их параметров использованы обмеры диаметров 100 стволов сосны в 78-летнем сосновке естественного происхождения, I класса бонитета, полнотой 0,6, со средним значением второго коэффициента формы  $q_2 = 0,64$ . Обмеры проведены на лежащих деревьях в коре и без коры мерной вилкой параллельно поверхности земли, на расстояниях от корневой шейки: пень, 1,3 м и на каждом нечетном целом значении (в метрах), последний обмер – на четном значении.

1. Параметры функции образующей ствола дерева вычисляли методом наименьших квадратов (МНК) отклонений как по диаметрам (теоретические величины диаметров получали численными методами), так и по высотам вдоль ствола (вычислялись аналитически). Оба эти подхода дали близкие результаты. Исключение составляют стволы с большими комлевыми наплывами, когда МНК с отклонениями по диаметру не пригоден из-за высокой чувствительности функции в нижней части ствола. По этой причине мы остановились на минимизации квадратов отклонений по высоте обмеров. Компьютерная программа вычисления параметров модификаций модели образующей ствола находится в свободном доступе в интернете (<http://kaplina-tree.narod.ru>). Она реализована нами в виде книги Microsoft Excel, в т.ч. аппроксимация МНК - на базе надстройки «Поиск решений». Вычисляются как теоретические высоты для заданных пользователем диаметров, так и теоретические диаметры на заданных высотах ствола.

**Результаты и обсуждение.** Как отмечено выше, образующую ствола аппроксимировали функциями вида  $h = f(d)$ , в отличие от традиционно используемых – вида  $d = f(h)$ , где  $h$  – расстояние точки обмера диаметра от основания ствола и  $d$  – диаметр ствола. Это позволяет привлечь для аппроксимации S-образные функции с содержательными параметрами, широко применяемые в биологии. В частности, форма образующей ствола рассматривалась как результат S-образного характера роста дерева по высоте (Кофман, Попова, 1995). Образующая так-

же может быть представлена как природное кумулятивное распределение элементарных отрезков ствола по их диаметру (Лебков, 2002), что удобно при изучении сортиментной структуры ствола.

*Моделирование образующей ствола.* Привлекательна для этой цели, но не вполне адекватно отображает форму ствола функция Вейбулла в интегральной форме (Лебков, 20020, в данном случае её вычитаемый член:

$$p_h = 1/a^{(pd)^c}, \quad (1)$$

где  $p_h = h/H$  – относительное расстояние места обмера диаметра от основания ствола дерева,  $h$  – то же в абсолютном выражении,  $H$  – высота дерева,  $p_d = d/b$  – относительный диаметр (либо другие показатели ствола, например площадь сечения –  $g$ , окружность –  $l$ ),  $d$  – то же в абсолютном выражении,  $b$  – параметр масштаба, численно равный диаметру ствола  $d$  на относительном расстоянии от основания ствола  $p_h = 1/a$ ,  $a$  – параметр (в функции Вейбулла фиксирован и равен  $e$  – основанию натурального логарифма),  $c$  – параметр формы, в случае замены  $p_d$  на  $p_g$   $c$  уменьшается вдвое, при  $c > 1$  кривая S-образна. Дополнительным удобством функции Вейбулла при аппроксимации является соответствие её некоторых особенностей свойствам ствола: фиксация кривой в вершине (в точке апикального роста) и асимптотическое приближение к основанию (неопределенность точки перехода от ствола к корням).

Гибкость кривой несколько повышается при замене фиксированного значения  $e$  на параметр  $a$ , однако этого недостаточно для адекватной аппроксимации, особенно искажается верхняя часть образующей. Это связано с относительной автономностью формы верхней и нижней частей ствола, главным образом, из-за влияния кроны. Верхняя часть ствола отличается от нижней его части также своим более молодым возрастом и, следовательно, большей относительной динамикой по длине и диаметру. Так, при увеличении в процессе роста высоты ствола в два раза, верхняя его половина полностью обновляется, в то время как нижняя – в значительно меньшей степени (по высоте только на 1/3). Это объясняет отмечаемую в литературе более высокую стабильность формы нижней части ствола по сравнению с верхней.

На основе функции (1) проведена разработка модели с требуемыми свойствами. Из множества апробированных вариантов только единственный позволил описать образующую ствола без искажений (систематических отклонений); его наиболее общий вид (Каплина, Лебков, 2006):

$$p_h = 2/(a^{(pd)^{c1}} + a^{(pd)^{c2}}), \quad (2)$$

где  $p_h$ ,  $p_d$  и  $b$  имеют тот же смысл, что и в функции (1),  $c_1$  и  $c_2$  – параметры формы. Таким образом, достаточная точность описания образующей ствола обеспечивается: 1) конструкцией модели и 2) наличием в ней двух параметров формы.

Конструкция модели (2) представляет собой гармоническое среднее двух функций вида (1):

$$p_h = 1/a^{(pd)c1}, \quad (3)$$

$$p_h = 1/a^{(pd)c2}, \quad (4)$$

что соответствует представлению о форме продольного профиля ствола как результирующей двух относительно автономных составляющих, различающихся только по параметру формы:  $c_1 < c_2$ ; при  $c_1 = c_2$  функции (1) и (2), а также функции (3) и (4) попарно идентичны. Большая величина параметров формы соответствует большей полнодревесности (близости к цилиндрической форме) ствола.

Кроново-комлевая составляющая (3) образующей ствола влияет в основном на форму верхней части профиля ствола и отчасти комля (рис. 1, 3), а основная стволовая составляющая (4) – в основном на форму его нижней части (рис. 1, 4). В средней же части профиля (в точке  $p_h = 1/a$ ) их влияние одинаково. Можно предложить интерпретацию функций (3) и (4) как образующих ствола в предельных случаях влияния короны на его форму: (3) – при распространении влияния короны до основания дерева и (4) – при отсутствии влияния короны.

Для удобства практического использования и для получения более устойчивых параметров формы модель образующей (2) можно упростить за счет фиксирования параметра  $a$ . Возможен и другой способ – фиксированием параметров  $c_1$  и  $c_2$  при свободном  $a$ . При выборе фиксированного значения  $a$  руководствовались его смыслом в

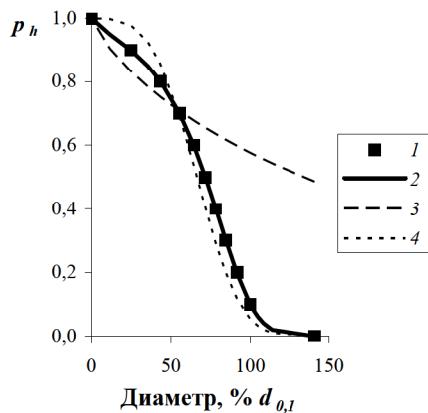


Рис. 1. Образующая ствола и её составляющие. 1 – экспериментальные данные – средние числа сбега для сосны по В.К. Захарову (1967), 2 – образующая, функция (2), 3 – кроново-комлевая составляющая, функция (3), 4 – основная составляющая, функция (4)

лесохозяйственной практике: при  $a = 2$   $b$  равен по величине диаметру на середине ствола, широко используемому в составе так называемого второго коэффициента формы  $q_2 = b/D_{1,3}$ , где  $D_{1,3}$  – диаметр на высоте груди:

$$p_h = 2/(2^{(pd)c1} + 2^{(pd)c2}), \quad (5)$$

обозначения те же, что для моделей (1) и (2). Данная модификация нивелирует особенности формы стволов по биологическим видам деревьев (Лебков, Каплина, 2001). Явное отличие обнаружено только у параметра  $c_1$ , который у хвойных пород обычно выше значения 0,9, а у лиственных – ниже, что согласуется с их различием по типу ветвления, толщине и углу прикрепления ветвей к стволу. Функция (5) апробирована при исследовании закономерностей формы ствола, общих для основных лесообразующих пород России, закономерностей вертикального распределения массы стволов сосны обыкновенной, возрастной динамики формы стволов сосны, кедра и ели, изменчивости формы ствола сосны и ели, влияния на форму ствола сосны параметров коры (Каплина, Лебков, 2006; Лебков, Каплина, 2001, 2003а, б, 2004б, 2005, 2007, 2008). Для совокупности из 176 стволов хвойных и лиственных пород различного возраста и условий произрастания при варьировании второго коэффициента формы  $q_2$  от 0,51 до 0,83  $c_1$  и  $c_2$  в модели (5) изменяются в пределах, соответственно, 0,3–2,1 и 2,8–7,5. Для сравнения: образующая конуса аппроксимируется функцией (5) с параметрами  $c_1 = 0,79$ ,  $c_2 = 2,41$ , а функция нормального распределения в интегральном выражении –  $c_1 = c_2 = 3,51$  (при  $b = 3,11\sigma$ , где  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение).

Как следует из рис. 1, для практических целей наиболее важна информация о параметре формы  $c_2$ . При оценке объема ствола параметр  $c_1$  может быть зафиксирован на уровне его средней величины, по нашим данным, при  $a = 2$  близкой к 1,0 (Лебков, Каплина, 2004а). В такой максимально упрощенной модификации функция (2) принимает вид:

$$p_h = 2/(2^{(pd)} + 2^{(pd)c2}). \quad (6)$$

Особенности аппроксимации различными модификациями модели образующей ствола – (2), (5) и (6) показаны на рис. 2 на том же примере, что и рис. 1. По модели (2) систематические ошибки практически отсутствуют. По модификации (5) – колеблются по высоте ствола в пределах  $\pm 1\% d_{0,1}$  (диаметра на высоте ствола 0,1H), увеличиваясь до  $+2\%$  в верхней четверти ствола, отражая специфику образующей ствола сосны. По модификации (6) погрешности также невелики, но вследствие усреднения параметра  $c_1$  искажается форма верхней части ствола.

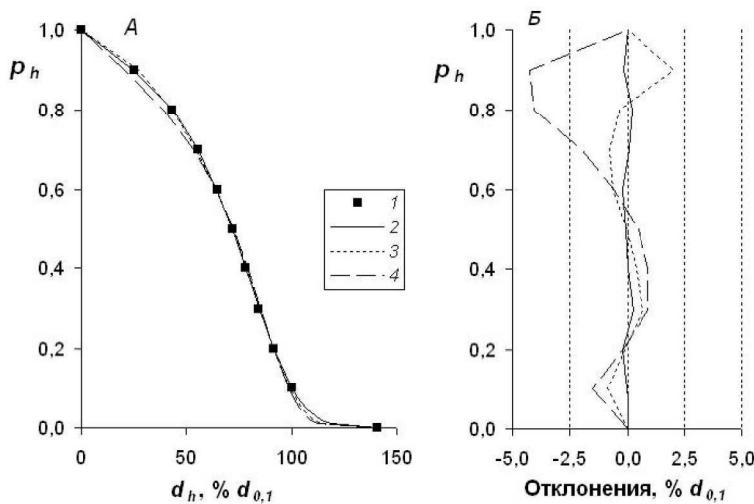


Рис. 2. Образующие ствола в коре (A) и их отклонения (B) от истинных значений, полученные по различным модификациям модели

1 – экспериментальные данные – средние числа сбега для сосны по В.К. Захарову (1967), 2 – модель (2), 3 – модификация (5), 4 – модификация (6)

Модификация (6) использована для составления таблиц объемов (Ельшанкин, 2004а); в таблице 1, в которой объем ствола низшего разряда формы ( $q_2 = 0,55$ ) составляет около 70% от объема ствола высшего разряда ( $q_2 = 0,75$ ). Модификация (5) использована для составления таблиц относительного сбега (Лебков, Каплина, 2003в); показано, что при равных  $D_{1,3}$  и, соответственно, равных объемах в нижней части стволов объем средней части ствола низшего разряда формы составляет около 60% от объема средней части ствола высшего разряда. Эти различия ещё раз подчеркивают важность прикладных исследований формы ствола.

Отклонения теоретических величин от экспериментальных по функции (5) при определении параметров для каждого дерева (100 шт.) сосны на пробной площади (во всех случаях  $R^2 > 0,98$ ), показаны на рис. 3. Подавляющая часть остаточных отклонений (как по диаметру, так и по высоте) лежит в пределах  $\pm 2\text{--}3\%$ . Более значительные их величины объясняются в основном дефектами ствола отдельных деревьев. Систематические ошибки незначительны. Так, отклонения объемов стволов вычисленных по модели (5) от вычисленных по принятому в лесной таксации методу (по объемам двухметровых отрезков – «сложная

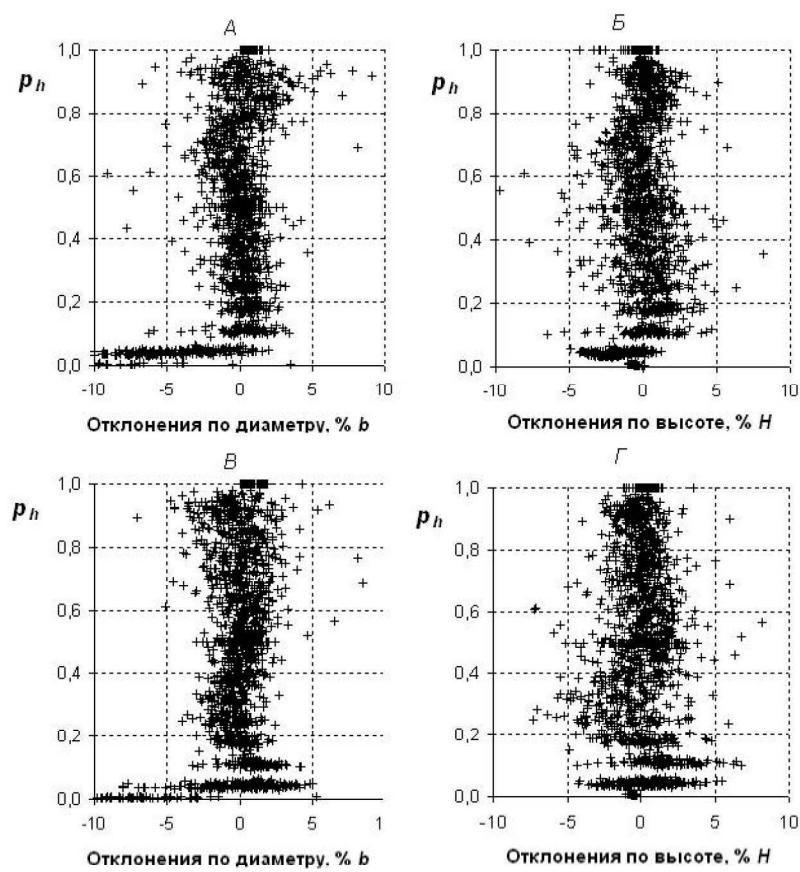


Рис.3. Остаточные отклонения по модификации (5) для 100 стволов 78-летнего древостоя сосны *a*, *в* – отклонения по диаметру на экспериментальных высотах, *б*, *г* – отклонения по высоте обмера для экспериментальных диаметров, *а*, *б* – стволы в коре, *в*, *г* – стволы без коры/

формула Губера» (Анучин, 1992) изменялись по отдельным деревьям в пределах  $-3,6 \pm +1,8$ , т.е. в пределах точности таксационного метода ( $\pm 2-4\%$ ). Суммарные же отклонения для 100 стволов оказались следующими (раздельно по комплевой, средней и вершинной частям ствала):

Расположение в ствole, % H	0-25	25-75	75-100	В среднем
Отклонение, %	-0,44	-0,25	+0,38	-0,31

Из рис. 3 видно, что часты случаи занижения диаметра у основания ствola в коре, в основном по причине резкого утолщения здесь корки. При аппроксимации тех же стволов без коры отклонения по диаметру симметричны относительно нуля на всем протяжении ствola, кроме пня. На высоте пня наблюдается искажение округлого поперечного сечения ствola из-за интенсивного прироста над корневыми лапами, что характерно для спелых древостоев. Рассчитанная по модели величина диаметра оказывается несколько ниже измеренной и обычно близка к среднему диаметру эллипса, вписанного в поперечное сечение пня. Заметим, что указанные «корректизы», вносимые моделью в комплевой части ствola, практически не отражаются на её параметрах и на точности аппроксимации остальной части образующей ствola. Такой результат достигается применяемым способом минимизации отклонений по  $p_h$ ; этот прием может быть полезен при материально-денежной оценке лесосеки в случае значительной закомелистости ствola, для коррекции его объема. Указанные систематические отклонения не являются результатом «плохой работы» модели, а, напротив, подтверждают соответствие её конструкции особенностям формы ствola.

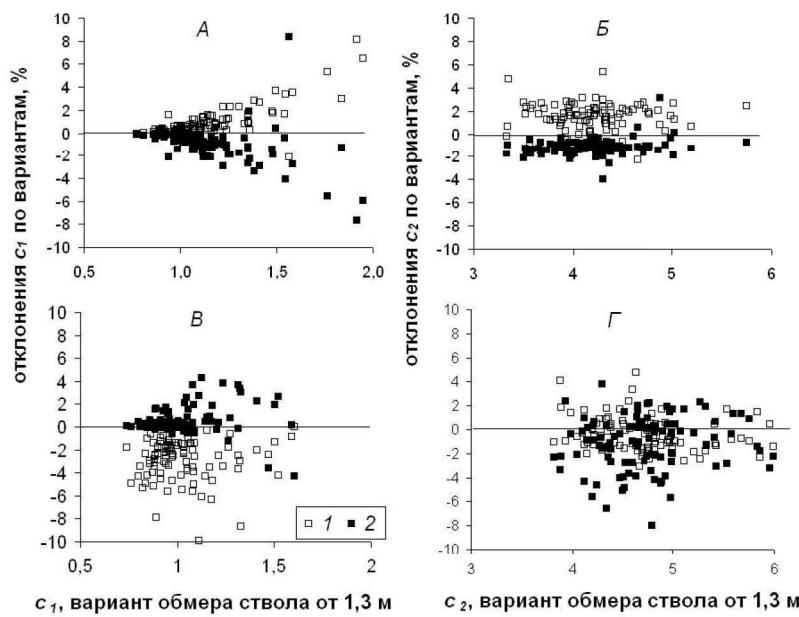


Рис. 4. Отклонения оценок параметров модификации (5)  $c_1$  (а, в) и  $c_2$  (б, г) для различных вариантов обмеров стволов в коре (а, б) и без коры (в, г) от оценок для среднего варианта обмера (от 1,3 м до вершины)/ варианты обмеров: 1 - от пня до вершины, 2 – от 3 м до вершины/

В связи с неопределенностью высоты распространения комлевых наплывов важна информация об устойчивости параметров формы при их оценке без учета обмеров в нижней части ствола. На рис. 4 показаны различия параметров формы, полученных по всем обмерам стволов 100 деревьев (от 12 до 21 обмера на каждом стволе, в зависимости от его протяженности) и при последовательном исключении обмеров в нижней части ствола (параметр  $b$  при этом практически не изменен). Из рисунка очевидны слабые, но систематические изменения параметров  $c_1$  и  $c_2$  для ствола в коре. Для ствола без коры сказанное справедливо только в отношении «кроново-комлевого» параметра  $c_1$ , в то время как  $c_2$  изменяется случайным образом, т.е. для его оценки обмеры ниже 1,3 м не обязательны. В целом можно заключить, что оценкам параметров формы ствола свойственна высокая устойчивость к исключению обмеров ниже 1,3 м.

Важнейшим вопросом лесной таксации является точность описания образующей ствола (кривой сбега) по координатам её 5 характерных точек ( $x; y$ ): в вершине ствола ( $0; H$ ), на высоте груди ( $D_{1,3}; 1,3$  м) и на четвертях высоты ствола – ( $D_{1/4}; 1/4H$ ), ( $D_{1/2}; 1/2H$ ), ( $D_{3/4}; 3/4H$ ). Как отмечено выше, массовые таблицы объемов и сбега (1931) составлены на основе графического выравнивания этих точек. На рис. 5 демонстрируется устойчивость параметров формы и масштаба при аппроксимации 5 точек образующих ствола тех же 100 деревьев сосны. Систематические ошибки при оценке параметров оказались невелики, а случайные – различны по параметрам: размах относительных отклонений по  $c_1$  (рис. 5, а) практически в два раза больше, чем по  $c_2$  (рис. 5, б), и в 10 раз по сравнению с  $b$  (рис. 5, в). При этом корреляция между оценками параметров формы по 5 точкам и по контрольному варианту сходная и довольно высокая для  $c_1$  (рис. 5, г) и  $c_2$  (рис. 5, д). Оценка  $b$  по 5 точкам практически не отличается от оценки по более трудоемкому варианту.

Альтернативный способ аппроксимации образующей ствола с фиксированием параметров  $c_1$  и  $c_2$  модели (2) ещё недостаточно апробирован. Он вытекает из данной выше интерпретации функций (3) и (4), соответственно, как кроново-комлевой и основной стволовой составляющих при условии, что степень их влияния на результатирующую образующую ствола определяется только параметром  $a$ . При этом параметры формы  $c_1$  и  $c_2$  должны быть постоянными для совокупности деревьев, выделенной по определенным критериям (элемент леса, биологический вид и т.п.). Точка ( $b, 1/a$ ), где пересекаются кривые на рис. 1, для стволов сосны в коре обычно располагается несколько выше, чем

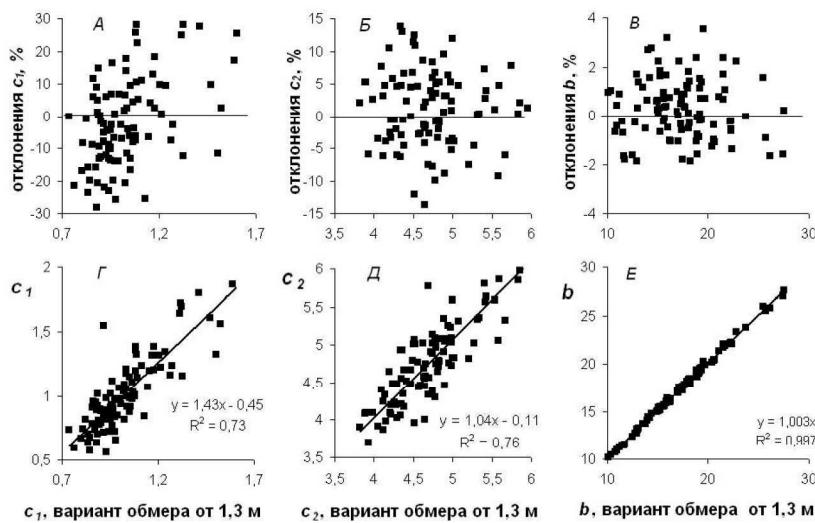


Рис.5. Результаты оценок параметров модификации (5) по пяти обмерам в сравнении с полученными по варианту обмеров от 1.3 м до вершины  
а, б, в – отклонения и г, д, е – величины параметров  $c_1$  (а, г),  $c_2$  (б, д),  $b$  (в, е)

$p_h = 1/2$  (т.е.  $a < 2$ ), а без коры – около данной точки; для стволов ели в коре, напротив, обычно  $a > 2$  и приближается к  $e$  ( $\approx 2,7$ ) (Лебков, Каплина, 2001). Очевидно, что анализ изменчивости параметра  $a$  перспективен при изучении влияния кроны на форму ствола, а также для выявления особенностей биологических видов. Отклонения выровненных величин по этому способу от фактических для 100 сосен в основном лежат в пределах  $\pm 2\text{--}3\%$  и симметричны относительно нулевой отметки (рис. 6), фиксированные величины параметров формы модели (2) оказались следующими: для стволов в коре  $c_1 = 1,02$  и  $c_2 = 3,90$ , без коры  $c_1 = 1,14$  и  $c_2 = 5,39$ .

В случае фиксирования параметра  $a$  модели (2) (модификация (5)) параметр формы  $c_1$  имеет четкую парную связь только с протяженностью кроны (в абсолютном и относительном выражении) из всех показателей дерева (рис. 7, а), а параметр формы  $c_2$  – также только с одним показателем – вторым коэффициентом формы  $q_2$  (рис. 7, б). В случае же фиксирования параметров  $c_1$  и  $c_2$  модели (2) при свободном параметре  $a$  наблюдается сходная картина, но уже для величин, соответственно,  $1/a$  (рис. 7, в) и  $1/b$  (рис. 7, г), т.е. в обоих случаях проявляется влияние двух факторов формообразования ствола. При  $a = 2$  выра-

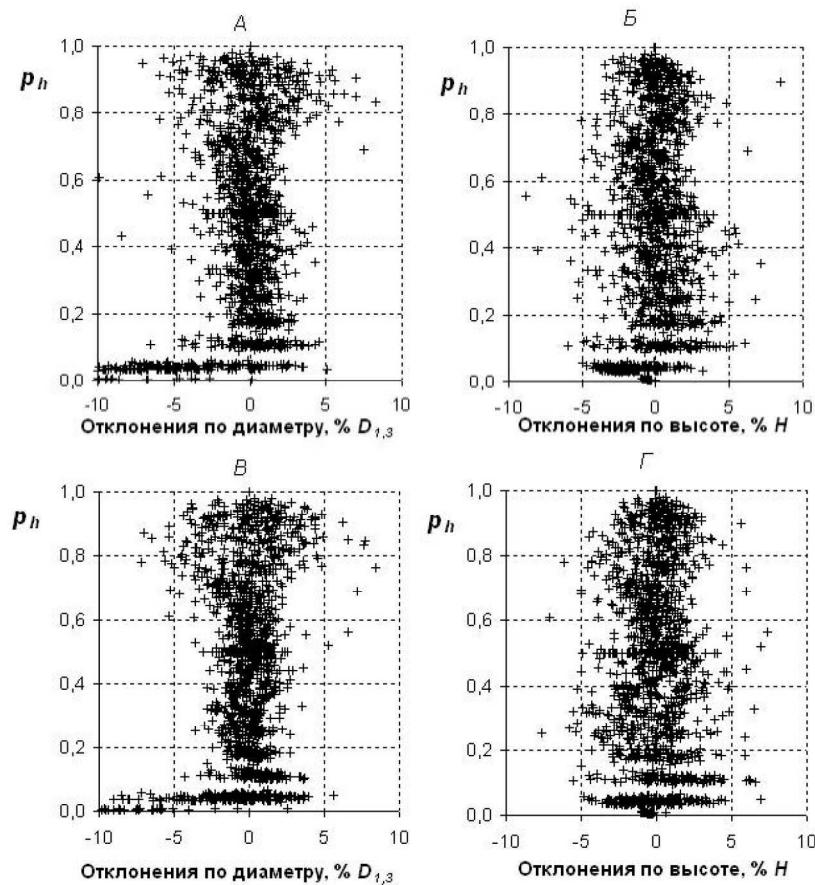


Рис. 6. Распределение по высоте стволов остаточных отклонений модели (2) при фиксированных параметрах формы для 100 стволов 78-летнего древостоя сосны. *а, в* – отклонения по диаметру на экспериментальных высотах, *б, г* – отклонения по высоте обмера для экспериментальных диаметров, *а, б* – ствол в коре, *в, г* – ствол без коры.

жение для параметра формы  $c_2$  (Лебков, Каплина, 2003в), рассчитанное для 176 стволов хвойных и лиственных пород:

$$c_2 = 7,5 D_{1,3}^{0,082} q_2^{2,1}, \quad (7)$$

сходно с соответствующей зависимостью в 78-летнем сосняке. Напротив, параметр формы  $c_1$  по совокупности 176 стволов:

$$c_1 = 0,42 D_{1,3}^{0,15} c_2^{0,22} \quad (8)$$

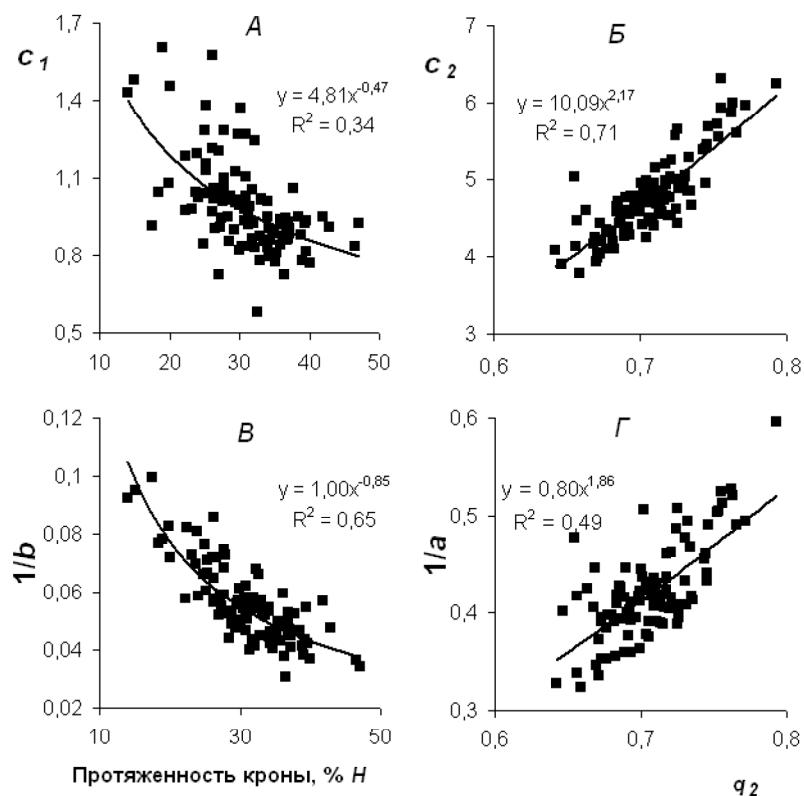


Рис. 7. Связь параметров модификаций модели образующей (без коры) с показателями дерева. а, б – модификация (5), в, г – модель (2) при фиксированных  $c_1$  и  $c_2$

имеет прямую связь с диаметром, а в 78-летнем сосняке – обратную, что говорит о различии в этих совокупностях ведущих факторов формообразования кроновой части ствола.

*Моделирование продольного профиля прироста ствола дерева – одна из возможностей нового подхода. При других подходах форма ствола не учитывается в явном виде, что, во-первых, не позволяет использовать её закономерности, и, во-вторых, затрудняет изучение влияния её величины и динамики на формирование формы прироста.*

Модель формы прироста разработана на основе модификации модели образующей ствола (5). Приrostы по диаметру на различных вы-

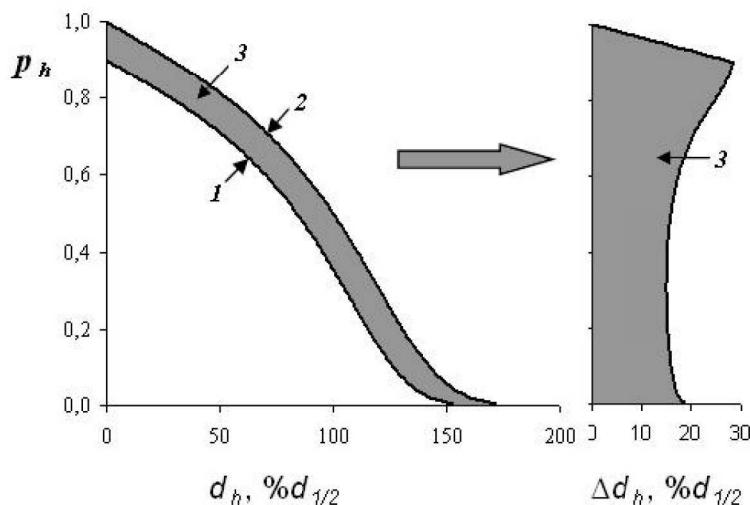


Рис. 8. Моделирование продольного профиля прироста ствola/ 1 – образующая ствola на начало, 2 – на конец учетного периода, 3 – профиль прироста ствola.

сотах вдоль ствola ( $\Delta d_h$ ) выражали как разность диаметров образующих ствola в конце и начале учетного периода (рис. 8). Вклад параметров модели в формообразование прироста выявляли в ходе модельного эксперимента, изменяя их относительные показатели:  $p_{\Delta H} = \Delta H/H$ ,  $p_{\Delta d_{1/2}} = \Delta d_{1/2}/d_{1/2}$ ,  $p_{\Delta c_1} = \Delta c_1/c_1$ ,  $p_{\Delta c_2} = \Delta c_2/c_2$  в диапазоне их экспериментальных значений, где  $p_{\Delta H}$ ,  $p_{\Delta d_{1/2}}$ ,  $p_{\Delta c_1}$  и  $p_{\Delta c_2}$  – относительные приросты, а  $\Delta H$ ,  $\Delta d_{1/2}$ ,  $\Delta c_1$  и  $\Delta c_2$  – абсолютные приросты, соответственно, высоты ствola, диаметра на его середине, параметров формы.

Оказалось, что в случае фиксированной формы образующей ствola форма его прироста может изменяться в самых широких пределах – от возрастающей до падающей. На рис. 9 показаны примеры формы прироста ствola по её основным типам, полученные в модельном эксперименте (принятые величины параметров формы близки к средним для обобщенной совокупности деревьев различных пород и возрастов). Тип формы прироста ствola определяется граничными значениями параметров модели (таблица).

Для параметра  $c_2$  граничных значений не обнаружено, при его более высоких значениях увеличивается контраст по величине прироста в верхней и нижней частях ствola, причем распределение прироста в

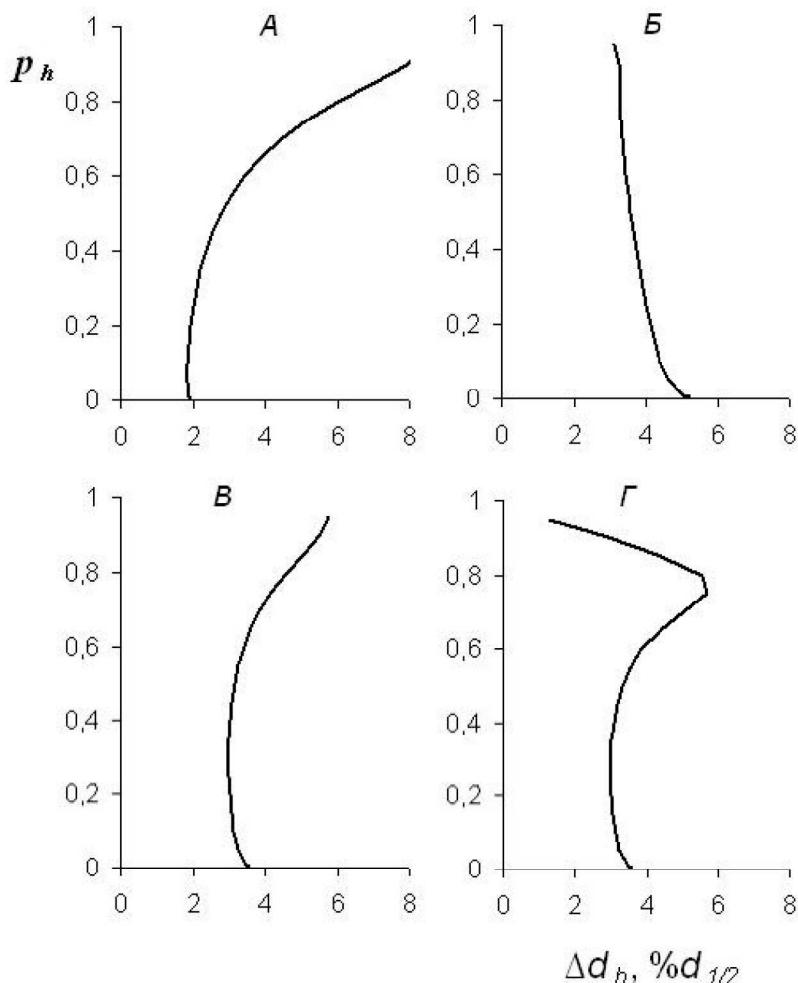


Рис. 9. Моделирование основных типов формы профиля прироста ствola  
 (ôî ðì àñðàí ëàôèêñèòî ààí à)/ $c_1 = 1, c_2 = 4$ : а – возрастающая ( $p_{\text{?}H} = 3\%$ ;  $p_{\text{?}dl/2} = 1\%$ ); б – падающая ( $p_{\text{?}H} = 1\%$ ;  $p_{\text{?}dl/2} = 3\%$ ); в – вогнутая ( $p_{\text{?}H} = 2\%$ ;  $p_{\text{?}dl/2} = 2\%$ );  $c_1 = 0,5, c_2 = 4$ ; г – выпуклая ( $p_{\text{?}H} = 2\%$ ;  $p_{\text{?}dl/2} = 2\%$ ).

пределах этих частей становится более равномерным (рис. 10). На рис. 10, а, б показана зависимость формы прироста ствola от формы ствola в пределах варьирования последней в древостое. Для формы ствola характерна возрастная динамика с изменением  $c_2$ , обычно не превыша-

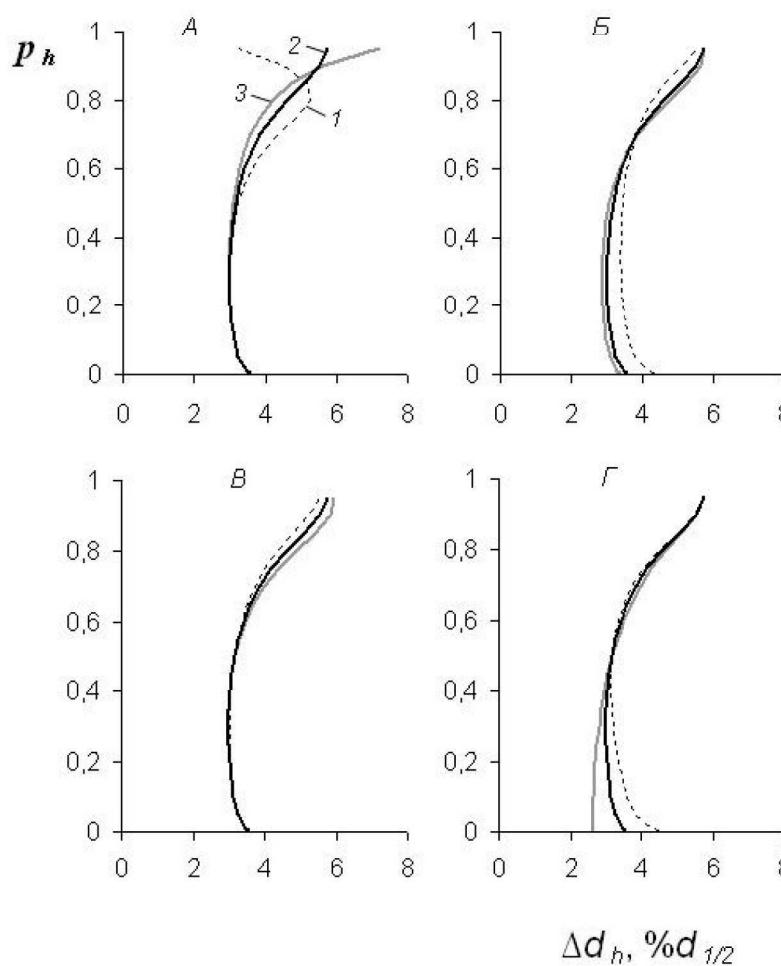


Рис. 10. Связь формы профиля прироста с формой ствола ( $p_{\Delta H} = 2\%$ ;  $p_{\Delta d_{1/2}} = 2\%$ , средние параметры формы –  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 4$ ).

Форма ствола в статике: а – кроново-комлевая –  $c_1$ , б – основная стволовая –  $c_2$ ; 1 – меньше на 25%, 2 – средняя, 3 – больше на 25%.

Форма ствола в динамике: в – кроново-комлевая –  $c_1$ , г – основная стволовая –  $c_2$ ; 1 – уменьшение на 1%, 2 – без изменений, 3 – увеличение на 1%.

*Таблица 1.* Область значений параметров модели и соответствующие типы формы прироста (ТФП) верхней и нижней частей ствола в случае фиксированной формы профиля ствола

Обл. значений $p_{\Delta H}$ $/p_{\Delta d_{1/2}}$	ТФП нижней части ствола	Область значений $c_1$	ТФП верхней части ствола	На рис. 9
> 1	возрастающая	Не определяли		<i>A</i>
< 1	падающая	Не определяли		<i>B</i>
= 1	вогнутая	> 1	возрастающая	<i>B</i>
		< 1	выпуклая	<i>g</i>

ющем 1% в год (Лебков, Каплина, 2003а, б), что также корректирует рассмотренные выше закономерности формы прироста ствола (рис. 10, *в, г*). Можно заключить, что ведущим фактором формы профиля прироста ствола является соотношение  $p_{\Delta H}/p_{\Delta d_{1/2}}$ , в существенно меньшей мере она определяется величиной и динамикой параметров формы образующей ствола.

Результаты модельного эксперимента не противоречат выводам экспериментальных исследований и позволяют интерпретировать последние. Так, онтогенетическая динамика формы прироста объясняется в основном динамикой  $p_{\Delta H}$ . Изменчивость формы прироста в пределах древостоя определяется главным образом диапазоном  $p_{\Delta d_{1/2}}$ . Изменчивость формы прироста по годам менее определена, т.к. зависит от особенностей влияния климатических факторов и на  $p_{\Delta H}$  и на  $p_{\Delta d_{1/2}}$ . Характерная для лиственных пород выпуклость формы прироста в верхней части ствола связана с низкой полнодревесностью ствола в кроне симподиально ветвящихся деревьев ( $c_1 < 1$ ). Связь с относительной длиной кроны и отношением высоты дерева к его диаметру объясняется их коррелированностью с параметрами предлагаемой модели. Ухудшение формы ствола при рубках ухода связано с увеличением  $p_{\Delta d_{1/2}}$ .

Отмеченные особенности распределения вторичного (латерального) прироста древесины вдоль осей дерева в связи с первичным (апикальным) её приростом можно интерпретировать следующим образом. Наименьшее варьирование в древесном ценозе формы ствола дерева и его высоты может быть результатом стабилизирующего отбора в условиях конкуренции за свет. Поддержание же этой стабильности может осуществляться за счет изменчивости распределения прироста вдоль

ствола. Таким образом, поддержание необходимых величин апикального прироста и формы ствола в случае снижения его суммарного прироста обеспечивается за счет снижения прироста в нижней половине ствола.

Для однозначного описания формы прироста ствола по разработанной модели при известной фиксированной форме ствола достаточно информации о величине  $p_{\Delta H}/p_{\Delta dh}$ . При аппроксимации же экспериментальных данных динамика параметров формы ствола обычно не известна, что должно компенсироваться дополнительной информацией. Для этого по соотношению  $p_{\Delta H}/p_{\Delta dh}$  определяется тип формы профиля прироста. При возрастающем и падающем типе формы необходимы измерения прироста по диаметру как минимум в нижней и верхней частях ствола (например, на 25% $H$  и 75% $H$ ), а при вогнутом типе – и на середине ствола. Предварительные результаты позволяют надеяться на возможность разработки упрощенного метода оценки формы прироста ствола.

**Заключение.** Предложенный новый подход к исследованию формы продольного профиля ствола дерева объединяет возможности двух направлений её количественного описания: посредством как параметров формы, так и кривой образующей ствола дерева. Примером реализации этих возможностей стали унифицированные таблицы объема и таблицы сбега, пригодные для основных лесообразующих пород России, а также таблицы вертикального распределения фитомассы стволов и доли коры сосны. Продолжением работы в этом прикладном направлении может стать составление таблиц объемов круглых лесоматериалов различной толщины и сбега в связи с формой ствола, а в применении к конкретным лесосекам – разработка оптимального способа оценки этих показателей.

Данный подход оказался результативным и в исследовании фундаментальных закономерностей благодаря интерпретируемости конструкции и параметров модели образующей ствола дерева. Выделены две структурных составляющих образующей ствола: основная стволовая и кроново-комлевая с соответствующими параметрами формы и особенностями их связи с показателями дерева. Дальнейшее развитие подхода, прежде всего идентификация параметров модели (2) на массовом материале, позволит выявить особенности формы стволов деревьев различных лесообразующих пород и различных классов роста и развития.

С помощью данного подхода удалось также смоделировать основные закономерности формы продольного профиля прироста ствола,

известные в виде эмпирических фактов. Оценены граничные значения параметров модели (соотношения  $p_{\Delta H}/p_{\Delta d^{1/2}}$  и параметра формы ствола  $c_1$ ) для основных типов формы прироста ствола – возрастающей, выпуклой, вогнутой и падающей раздельно для верхней и нижней частей ствола. Определен ведущий фактор модели –  $p_{\Delta H}/p_{\Delta d^{1/2}}$ . Данный подход может найти применение при решении широкого круга вопросов лесо-ведения и лесоводства, в т.ч. биологической продуктивности деревьев и древостоев.

Новый подход к исследованию формы ствола и его прироста весьма перспективен для дальнейшего развития в связи с возможностью использования богатейших эмпирических знаний, накопленных в различных научных направлениях, в частности в лесной таксации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 06-04-49397)

### Литература

- Анучин Н.П. 1992. Лесная таксация М.: Лесн. пром-сть. 552 с.
- Дворецкий М.Л. 1964. Текущий прирост древесины ствола и древостоя. М.: Лесн. пром-сть. 125 с.
- Захаров В.К. 1967. Лесная таксация. М.: Лесн. пром-сть. 405 с.
- Каплина Н.Ф. 2007а. Моделирование вертикального распределения древесного прироста на основе уравнения образующей ствола с двумя параметрами формы // Дендроэкология и лесоведение: Материалы Всерос. конф. Красноярск: Институт леса им. В.Н. Сукачева СО РАН. С.55–58.
- Каплина Н.Ф. 2007б. Распределение радиального прироста древесины вдоль ствола: модельный эксперимент // Регуляция роста, развития и продуктивности растений. V Междунар. науч. конф. 28–30 ноября 2007. Минск. С.91.
- Каплина Н.Ф. 2008а. Моделирование продольных профилей древесного ствола и его прироста: уравнение с параметрами формы // Математические методы в экологии. Тез. докл. Третьей Всерос. науч. школы молодых ученых. Петрозаводск, 24–29 авг. 2008 г. Петрозаводск. С.41–43.
- Каплина Н.Ф. 2008б. Параметры распределения древесного прироста вдоль надземных осей дерева // Математическая биология и биоинформатика. Докл. II Междунар. конф. Пущино, 7–13 сентября 2008 г. М. С.223–224.
- Каплина Н.Ф., Лебков В.Ф. 2006. Уравнение образующей ствола дерева с двумя параметрами формы: структура, модификации и компьютерная программа // Актуальные проблемы лесного комплекса. Сб. науч. тр. по итогам международн. науч.-техн. конф. Брянск: БГИТА. Вып.13. С.54–57.
- Кофман Г.Б. 1986. Рост и форма деревьев. Новосибирск: Наука. 211 с.

- Кофман Г.Б., Попова А.В. 1995. Образующая, как следствие динамики абсолютных размеров древесных стволов. I. Вывод уравнений // Лесная таксация и лесоустройство: Межвуз. сб. науч. тр. Краснояр. гос. технол. акад. Красноярск. С.50–57.
- Крамер П.И., Козловский Т.Т. 1963. Физиология древесных растений. М.: Гослесбумиздат. 627 с.
- Лебков В.Ф. 2002. Аппроксимация образующей ствола и идентификация его формы функцией распределения // Лесной журнал. № 5. С.15–23.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2001. Закономерности формы древесного ствола хвойных и лиственных пород// Лесной вестник. № 5(20). С.49–55.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2003а. Возрастная динамика формы ствола деревьев сосны обыкновенной и кедра сибирского // Лесной вестник. № 1(26). С.18–24.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2003б. Строение древостоев сосны и ели в числовых смешанных насаждениях по форме ствола и его возрастная динамика // Лесная таксация и лесоустройство. Красноярск. № 1(32). С.37–41.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2003в. Сбег древесных стволов различной формы по относительным высотам // Лесная таксация и лесоустройство. Красноярск. № 1(32). С.55–59.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2004а. Объемы стволов деревьев хвойных и лиственных пород по разрядам высот и формы ствола // Лесн. хоз-во. № 3. С.24–26.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2004б. Влияние параметров древесной коры на форму ствола деревьев сосны обыкновенной // Актуальные проблемы лесного комплекса. Сб. науч. тр. Брянск: БГИТА. Вып.9. С.26–29.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2005. Закономерности вертикальной структуры массы стволов деревьев сосны обыкновенной// Лесн. хоз-во. № 2. С.29–31.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2007. Строение сосняков по различным показателям формы древесного ствола // Актуальные проблемы лесного комплекса. Сб. науч. тр. по итогам междунар. науч.-техн. конф. Брянск: БГИТА. Вып.17. С.59–62.
- Лебков В.Ф., Каплина Н.Ф. 2008. Закономерности и оценки структуры древостоев сосны // Лесн. хоз-во. № 3. С.39–41.
- Массовые таблицы для сосны, ели, дуба, березы и осины по классам бонитета. 1931. М.: Сельхозгиз. 496 с.
- Серебряков И.Г. 1962. Экологическая морфология растений. М: Высшая школа. 378 с.
- Цельникер Ю.Л., Корзухин М.Д., Зейде Б.Б. 2000. Морфологические и физиологические исследования кроны деревьев (литературный обзор). М.: Мир Урании. 96 с.
- Chiba Y., Shinozaki K. 1994. A simple mathematical model of growth pattern in tree stems // Ann. Bot. Vol.73. P.91–98.

- Courbet F., Houllier F. 2002. Modelling the profile and internal structure of tree stem. Application to *Cedrus atlantica* (Manetti) // Ann. For. Sci. Vol.59. No.1. P.63–80.
- Deleuze C., Houllier F. 2002. A flexible radial increment taper equation derived from a process-based carbon partitioning model // Ann. For. Sci. Vol. 59. No.2. P.141–154.
- Ikonen V.-P., Kellomaki S., Vaisanen H. et al. 2006. Modelling the distribution of diameter growth along the stem in Scots pine // Trees Structure and Function. Vol.20. No.3. P.391–402.
- Valentine H.T., Gregoire T.G. 2001. A switchig model of bole taper // Can. J. Forest Res. Vol.31. No.8. P.1400–1409.